A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT 2r., sem. letni
KOLOKWIUM 1

Wrocław, 23 kwietnia 2013

ZADANIE 1A
W przestrzeni $C([0,1])$ (z nomą supremum), wykazać, że
(a) zbiór funkcji niemalejących jest domknięty, (2p)
(b) zbiór funkcji rosnących jest w powyższym zbiorze gęsty. (3p)

ROZWIĄZANIE: (a) Niech $f_n \to f$ jednostajnie. Niech $x < y$. Wtedy, dla każdego n mamy $f_n(x) \le f_n(y)$. Przechodząc do granicy dostajemy $f(x) \le f(y)$.
(b) Jeśli f jest niemalejąca, to $f_\epsilon = f + \epsilon x$ jest już rosnąca i $\|f_\epsilon - f\| = \epsilon$.

ZADANIE 1B. Wykazać, że funkcja przypisująca ciągowi jego sumę (bez modułów) jest
(a) ciągła na ℓ^1, (2p)
(b) nieciągła na ℓ^2. (3p)

ROZWIĄZANIE: (a) Niech $x = (x_n), y = (y_n)$ będą elementami ℓ^1. Wtedy

$$\left|\sum_n x_n - \sum_n y_n\right| \le \sum_n |x_n - y_n| = \|x - y\|_1,$$

czyli badana funkcja jest nawet lipschitzowska ze stałą 1.
(b) Niech $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, gdzie niezerowych wyrazów jest n. Te ciągi zbiegają w ℓ^2 do zera, a ich sumy są stale równe 1 (i nie zbiegają do zera).

ZADANIE 2A. Rozważmy zbiór $V \subset \ell^1$, $V = \{(x_n) : \sum_n x_n = 0\}$. Jest to podprzestrzeń domknięta (tego nie trzeba uzasadniać). Wskazać jakąś bazę topologiczną w podprzestrzeni V (z normą odziedziczoną z ℓ^1).

ROZWIĄZANIE: Definicja bazy w przestrzeni Banacha X: jest to zbiór **przeliczalny** $\{e_n : n \ge 1\}$, taki, że każdy element $x \in X$ przedstawia się **jednoznacznie** jako suma szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ (gdzie (a_n) jest pewnym ciągiem współczynników skalarnych).
W przestrzeni z zadania jest wiele baz. Na przykład zbiór ciągów $\{e_n : n \ge 2\}$, gdzie $e_n = (-1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ (minus jedynka na pierwszym miejscu i jedynka na n-tym miejscu). Jeśli $x = (x_n) \in \ell^1$ to udowodnimy, że jedynym szeregiem nad tą bazą zbieżnym w ℓ_1 do x jest

$$\sum_{n=2}^\infty x_n e_n. \quad \text{(Uwaga, sumowanie od dwójki!)}$$

Zbadajmy normę

$$\left\|x - \sum_{n=2}^N x_n e_n\right\| = \left|x_1 - \left(-\sum_{n=2}^N x_n\right)\right| + \sum_{n=N+1}^\infty |x_n|.$$

Z warunku na V mamy $x_1 = -\sum_{n=2}^{\infty} x_n$, zatem pierwszy człon (duży moduł) zbiega po N do zera. Drugi składnik jest ogonem szeregu zbieżnego, więc też zbiega do zera. Czyli mamy zbieżność szeregu w normie. Teraz jednoznaczność. Każdy szereg zbieżny postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} y_n e_n$$

należy do V. Jeśli taki szereg równy jest naszemu elementowi x, to ponieważ szereg ten na współrzędnej $n \geq 2$ przyjmuje wartość y_n, to musi być $y_n = x_n$ dla wszystkich $n \geq 2$. Ale pierwsza współrzędna jest wyznaczona przez pozostałe (z warunku na V jako minus suma pozostałych), więc dwa elementy V równe na współrzędnych $n \geq 2$ są sobie równe.

ZADANIE 2B.
Wykaż, że każda funkcja $f \in C^1([0,1])$ (posiadająca ciągłą pochodną), jest różnicą dwóch funkcji rosnących.

ROZWIĄZANIE: Normą w przestrzeni $C^1([0,1])$ jest $\|f\|^1 = \|f\|_{sup} + \|f'\|_{sup}$. Pochodna jest ciągła na zbiorze zwartym, więc jest ograniczona, np. niech jej moduł nie przekracza $M > 0$. Możemy napisać

$$f = \frac{(M+\epsilon)x + f}{2} - \frac{(M+\epsilon)x - f}{2}.$$

Obliczając pochodne obu tych funkcji widzimy, że są one dodatnie (co najmniej ϵ), czyli że obie funkcje są rosnące.

ZADANIE 3A.
Napisać nierówność Höldera (z założeniami).

ROZWIĄZANIE: Dla dowolnych ciągów liczb **nieujemnych** (a_n) i (b_n) i dowolnej pary liczb $p > 1, q > 1$, takich że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leq \|(x_n)\|_p \cdot \|(y_n)\|_q,$$

gdzie $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p)^{\frac{1}{p}}$ (i podobnie $\|(y_n)\|_q$).
Dla dowolnych funkcji **nieujemnych** f i g na przestrzeni miarowej z miarą μ, i dowolnej pary liczb p, q, jak wyżej, mamy

$$\int f(x)g(x)\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

gdzie $\|f\|_p = \left(\int (f(x))^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (i podobnie $\|g\|_q$).

ZADANIE 3B.
Napisać nierówność Minkowskiego (z założeniami).

ROZWIĄZANIE: Niech (x_n) i (y_n) należą do ℓ^p, gdzie $p > 1$. Wtedy

$$\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p,$$

gdzie $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p)^{\frac{1}{p}}$ (i podobnie dla (y_n)).
Niech f i g należą do $L^p(\mu)$ (gdzie μ to miara na pewnej przestrzeni miarowej, a $p > 1$). Wtedy

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

gdzie $\|f\|_p = \left(\int (f(x))^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (i podobnie dla g).

ZADANIE 4A.
W przestrzeni Hilberta $L^2([0,1])$ znajdź rzut ortogonalny funkcji $g(x) = x^2$ na podprzestrzeń funkcji liniowych (postaci $f(x) = ax + b$).

ROZWIĄZANIE: W przestrzeni Hilberta H rzutem ortogonalnym punktu x na podprzestrzeń **domkniętą** W jest taki punkt $x_W \in W$, że $x - x_W \perp W$.
W zadaniu musi być $x^2 - ax - b \perp 1$ oraz $x^2 - ax - b \perp x$, czyli

$$\int_0^1 x^2 - ax - b \, dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_0^1 x^3 - ax^2 - bx \, dx = 0,$$

co daje układ równań:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b & = \frac{1}{3} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} & = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

który po rozwiązaniu daje $a = 1,\ b = -\frac{1}{6}$. Czyli szukanym rzutem jest $f(x) = x - \frac{1}{6}$.

ZADANIE 4B.
W przestrzeni Hilberta $L^2([0,1])$ znajdź bazę ortonormalną podprzestrzeni funkcji liniowych (postaci $f(x) = ax + b$).

ROZWIĄZANIE: Bazą ortonormalną w **ośrodkowej** przestrzeni Hilberta H jest układ wektorów $\{e_n : n \geq 1\}$, unormowanych i parami ortogonalnych, który jest bazą topologiczną (do tego wystarczy że jest on liniowo gęsty).
Bazą (nie ortonormalną) w zadaniu jest $\{p_0, p_1\}$, gdzie $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x$. Funkcja p_0 jest już unormowana. Trzeba zortonormalizować p_1, czyli znaleźć funkcję liniową $ax+b$ ortogonalną do 1 i potem ją unormować. Przed unormowaniem można przyjąć $a = 1$. Wtedy ma być

$$\int_0^1 x + b \, dx = 0,$$

co prowadzi do $b = -\frac{1}{2}$. Czyli pozostało unormować funkcję $x - \frac{1}{2}$. Jej norma w $L^2([0,1])$ to

$$\sqrt{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \, dx} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Zatem po unormowaniu, drugim elementem bazy jest funkcja $q_1(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

ZADANIE 5A.
Rozważmy zespoloną przestrzeń Hilberta $L^2(\mathbb{T})$, gdzie $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, z bazą $B = \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, $e_n(z) = z^n$. Niech $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ będzie ciągiem współczynników Fouriera funkcji f. Jaki będzie ciąg współczynników Fouriera funkcji $g(z) = zf(z)$?

ROZWIĄZANIE: Ciągiem współczynników Fouriera elementu x **ośrodkowej** przestrzeni Hilberta H wyposażonej w bazę ortonormalną $\{e_n : n \geq 1\}$ (lub $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$) jest ciąg $a_n(x) = \langle x, e_n \rangle$ (n przebiega albo zbiór liczb naturalnych albo całkowitych – to zależy tylko od tego jak ponumerujemy bazę, która jest po prostu zbiorem przeliczalnym). Wtedy $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e_n$ (lub $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) e_n$) jest rozwinięciem x w tej bazie.
W zadaniu, ciągiem dla $zf(z)$ będzie ciąg „przesunięty" $(b_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, gdzie $b_n = a_{n-1}$, bo $b_n = \langle zf, z^n \rangle = \int zf(z) \cdot z^{-n}\, d\lambda = \int f(z) \cdot z^{-n+1}\, d\lambda = \langle f, z^{n-1} \rangle = a_{n-1}$.

ZADANIE 5B.
Niech H oznacza zespoloną przestrzeń Hilberta $L^2(\mu)$, gdzie (X, μ) jest dowolną przestrzenią miarową. Udowodnij, że iloczyn dwóch funkcji z H należy do $L^1(\mu)$.

ROZWIĄZANIE: Przestrzenią Hilberta nazywamy przestrzeń liniową wyposażoną w iloczyn skalarny (a więc unitarną), która w normie (a ściślej w metryce) zadanej przez ten iloczyn jest zupełna.
Uwaga! W zadaniu słowo „iloczyn" oznacza zwykły iloczyn funkcji fg (a nie ich iloczyn skalarny, który jest pojedynczą liczbą, więc jego należenie do $L^1(\mu)$ nie miałoby sensu). Jeśli f i g są z H, to również $|f|$ i $|g|$ są. Zatem istnieje (i jest skończony) ich iloczyn skalarny $\int |f|\overline{|g|} d\mu$, ale to jest to samo co $\int |fg|\, d\mu$. Skończoność tego wyrażenia, to właśnie należenie fg do $L^1(\mu)$.

Inny sposób: skorzystać z nierówności Schwartza

$$\int |fg|\, d\mu \leq \left(\int |f|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int |g|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty.$$

Tomasz Downarowicz